Carl Ludwig Siegel
31.12.1896 – 4.4.1981

Am 4. April 1981 verstarb in Göttingen Carl Ludwig Siegel, korrespondierendes Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften seit 1958. Mit ihm ist einer der bedeutendsten Mathematiker unserer Zeit von uns geschieden.

C.L. Siegel wurde am 31. Dezember 1896 in Berlin geboren. Nachdem er dort 1915 an der Friedrich Werderschen Oberrealschule das Abiturientenexamen abgelegt hatte, studierte er an der Berliner Universität bis 1917 Mathematik, Astronomie und Physik; seine Lehrer in der Mathematik waren vor allem G. Frobenius und I. Schur. Nach einer Unterbrechung setzte er im Sommersemester 1919 das Studium der Mathematik in Göttingen fort, wo er 1920 bei E. Landau promovierte. Schon 1922 wurde er als ordentlicher Professor für Mathematik an die Universität Frankfurt berufen. 1938 kehrte er in gleicher Eigenschaft nach Göttingen zurück, nachdem er vorher schon Gastprofessuren in Göttingen und Princeton (USA) wahrgenommen hatte. Im Frühjahr 1940 siedelte er an das Institute for Advanced Study in Princeton über, dem er bis 1951 angehörte. In diesem Jahr wurde er erneut als ordentlicher Professor nach Göttingen berufen, und hier wurde er 1959 emeritiert.

Der Schwerpunkt der Siegelschen mathematischen Forschungen liegt in der Zahlentheorie (im weitesten Sinne). Schon in seiner Dissertation betrat er dieses Gebiet: Es gelang ihm, Aussagen des norwegischen Mathematikers A. Thue zur Approximation algebraischer Zahlen durch rationale Zahlen und zur Theorie der diophantischen Gleichungen wesentlich zu erweitern; das Resultat wurde als Satz von Thue-Siegel bekannt und berühmt. In den folgenden Jahrzehnten widmete er der Zahlentheorie zahlreiche weitere Arbeiten, in denen er immer wieder neue Fragestellungen behandelte, die er mit algebraischen, geometrischen und analytischen Methoden angriff, und in denen er zu fundamentalen Ergebnissen gelangte. Etwa um 1935 begann er, sich auch mit Problemen der Bewegung der Himmelskörper, speziell mit dem Dreikörperproblem, zu beschäftigen; eine Reihe von Arbeiten handelt von solchen Fragen. Die Beschäftigung mit diesen Problemkreisen regte Siegel später zu einer stattlichen Anzahl von Arbeiten funktionentheoretischen Inhalts an.

Es ist hier nicht möglich, die C.L. Siegel zu verdankenden vielfältigen neuen Erkenntnisse im einzelnen zu würdigen; dazu werde auf den Nachruf auf Siegel von E. Hlawka im Jahrbuch *Überblicke Mathematik* 1982 sowie auf Veröffentlichungen anderer Autoren hingewiesen, die demnächst im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erscheinen sollen. Doch sei im folgenden wenigstens exemplarisch auf einige der Leistungen etwas näher eingegangen, die für Siegel charakteristisch sind und die für die weitere Entwicklung in Teilgebieten der Analysis von Bedeutung waren.

Seit 1918 hatten die französischen Mathematiker G. Julia und P. Fatou die Iteration rationaler Funktionen studiert, in Deutschland hat sich später damit insbesondere H. Cremer befaßt. Eine wichtige Rolle in dieser Theorie spielt das Zentrumproblem, d.h. die Frage, wann eine nicht-lineare holomorphe Funktion mit Fixpunkt und zugehörigem Multiplikator vom absoluten Betrage 1 sich in einer Umgebung des

Fixpunktes in eine Drehung transformieren läßt. C.L. Siegel zeigte nun in einer 1942 in den Annals of Mathematics erschienenen Arbeit [39]*, daß eine solche Transformation stets dann möglich ist, wenn der Multiplikator nicht einer bestimmten Lebesgueschen Nullmenge angehört. Eine modifizierte Version des überaus scharfsinnigen Beweises ist in den „Vorlesungen über Himmelsmechanik" (Berlin - Göttingen - Heidelberg 1956) im Zusammenhang mit der Darstellung von Stabilitätsproblemen wiedergegeben. Es sei angemerkt, daß die Theorie der Iteration rationaler Funktionen gerade in jüngster Zeit durch Untersuchungen von D. Sullivan, A. Douady und B.E. Hubbard wieder ganz aktuell ist.

Bis in die 30er Jahre hatte die Funktionentheorie in mehreren komplexen Variablen an Beispielen mit interessanter globaler Struktur nur die abelschen Funktionen (als Verallgemeinerung der elliptischen Funktionen), die Thetareihen und die Hilbert-Blumenthalschen Modulfunktionen (über die wenig bekannt war) zur Verfügung. Nach Vorarbeiten von G. Rosenhain (1851), K. Weierstraß (1849) und B. Riemann (1857) war spätestens durch Arbeiten von H. Weber (Crelles Journal 74, 1872) das Transformationsverhalten allgemeiner Thetareihen unter (wie man jetzt sagen würde) Modulsubstitutionen bekannt. Diese klassischen Ergebnisse sowie die von Siegel entwickelte analytische Theorie der quadratischen Formen ([20], [22], [26]) führte ihn zur Entwicklung einer Theorie von automorphen Funktionen, die in einem Standardtyp von beschränkten homogenen Gebieten definiert werden können: In Verallgemeinerung der oberen Halbebene und in Analogie zu dem bei Thetareihen vorkommenden „Modul" betrachtet Siegel die Menge $\mathbb{H}_n$ der komplexen symmetrischen Matrizen, deren Imaginärteil Matrix einer positiv definiten quadratischen Form ist. Die symplektische Gruppe $Sp(n;\mathbb{R})$ der reellen $2n \times 2n$ Matrizen $M = \binom{A\,B}{C\,D}$, für welche $M^tJM = J$, $J := \binom{\;\,O\;E}{-E\;O}$, gilt, gibt vermöge

$$Z \to M<Z> = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \quad \text{für } M = \binom{A\,B}{C\,D} \in Sp(n;\mathbb{R})$$

Anlaß zu biholomorphen Selbstabbildungen von $\mathbb{H}_n$. In der symplektischen Geometrie [41] studierte er die unter $Sp(n;\mathbb{R})$ invariante geometrische Struktur von $\mathbb{H}_n$ und zeigte, daß jede biholomorphe Selbstabbildung von $\mathbb{H}_n$ diese Gestalt hat.

Eine ausgezeichnete diskrete Untergruppe von $Sp(n;\mathbb{R})$ ist die bereits seit der Mitte des 19. Jahrhunderts betrachtete *Modulgruppe n-ten Grades* $Sp(n;\mathbb{Z})$ aller ganzzahligen Matrizen aus $Sp(n;\mathbb{R})$

Eine *Modulform n-ten Grades* vom Gewicht k ist nach Siegel [32] eine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ mit

$$f(M<Z>) = \det(CZ+D)^{-k} f(Z) \quad \text{für alle} \quad M \in Sp(n;\mathbb{Z}).$$

Es zeigte sich später, daß die von ihm außerdem geforderte „Beschränktheit von f im Fundamentalbereich" im Falle $n > 1$ nicht erforderlich ist.

In Analogie zum klassischen Fall $n = 1$ zeigte Siegel unter anderem:

(i) Der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen n-ten Grades vom Gewicht k hat endliche Dimension.

(ii) Je $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ Modulformen n-ten Grades (von nicht notwendig gleichem Gewicht) sind algebraisch abhängig.

(iii) Die verallgemeinerte Eisenstein-Reihe

$$\sum_{(C,D)} \det(CZ+D)^{-k},$$

bei der über alle zweiten Zeilen (C,D) von $Sp(n;\mathbb{Z})$ summiert wird, ist eine nicht identisch verschwindende Modulform n-ten Grades vom Gewicht k (k genügend groß und gerade).

(iv) Die als Quotienten von Modulformen gleichen Gewichts definierten *Modulfunktionen n-ten Grades* bilden einen algebraischen Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $\frac{n(n+1)}{2}$.

Dieser Problemkreis wurde von ihm wiederholt aufgegriffen ([59], [64], [65], [75], [79], [86], [90]), er ist noch immer weltweit Gegenstand der Forschung.

In diesem Zusammenhang ist die seit K. Weierstraß aktuelle Frage zu nennen, wann aus der analytischen Abhängigkeit von meromorphen Funktionen mehrerer Variablen auf deren algebraische Abhängigkeit geschlossen werden kann und wann insbesondere ein Körper meromorpher Funktionen ein algebraischer Funktionenkörper ist. Siegel hat hierzu verschiedene wesentliche Beiträge geleistet, so durch die oben wiedergegebene Aussage (iv) ([32], [40]) und später in [64] durch eine sehr einfache Herleitung des Satzes über die Algebraizität des Körpers der meromorphen Funktionen auf einer zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit (unter der Voraussetzung, daß der Transzendenzgrad des Körpers gleich der Dimension der Mannigfaltigkeit ist). In den Beweisen werden ein Ansatz von H. Poincaré sowie in [64] Ausgestaltungen dieses Ansatzes von M. Hervé und J.P. Serre benutzt, wobei das Siegelsche Prinzip der Verwendung eines Schwarzschen Lemmas für Funktionen mehrerer Variablen eine wichtige Rolle spielt. Diese Methode läßt sich auch zum Beweis von Sätzen über algebraische Abhängigkeit meromorpher Funktionen auf (nicht notwendig kompakten) komplexen Räumen mit Singularitäten verwenden, wie von A. Andreotti 1963 gezeigt wurde. Mit anderen Methoden haben in neuerer Zeit insbesondere W. Thimm und R. Remmert Sätze über algebraische Abhängigkeit meromorpher Funktionen auf komplexen Mannigfaltigkeiten und Räumen gewonnen; von W. Thimm wurde 1939 der erste Beweis dafür gegeben, daß auf einer zusammenhängenden kompakten komplexen Mannigfaltigkeit der Dimension p zwischen je p+1 meromorphen Funktionen eine algebraische Relation besteht, falls p von diesen Funktionen analytisch unabhängig sind.

In der dem Andenken seines Lehrers E. Landau 1968 gewidmeten Arbeit „Zu den Beweisen des Vorbereitungssatzes von Weierstraß" [83], sagt Siegel: „Ich stamme noch aus dem großen neunzehnten Jahrhundert und hatte dann das weitere Glück, während meiner Studienzeit in Berlin und Göttingen durch hervorragende Persönlichkeiten in der damals lebendigen Tradition aus der Glanzzeit der Mathematik erzogen zu werden." So haben viele der Siegelschen Forschungen ihre Wurzeln in der mathematischen Welt des neunzehnten und des frühen zwanzigsten Jahrhunderts. In seinen späteren Jahren stand er manchen neuen Entwicklungen schroff ablehnend gegenüber und bedachte sie mit harter Kritik.

Zahlreiche Ehrungen sind C.L. Siegel zuteilgeworden. Er war siebenfacher Ehrendoktor, und zehn wissenschaftliche Gesellschaften wählten ihn zu ihrem Mitglied.

Max Koecher
Karl Stein

* Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schriftenverzeichnis in Band IV der Gesammelten Abhandlungen von C.L. Siegel (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966–1979).